« Математический анализ »

1 Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{2x}-\cos x}{\operatorname{arctg}4x}$

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^{2x}-\cos x}{\operatorname{arctg}4x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left\{\begin{array}{l}a^x-1\sim x\ln a\\ 4^x-\cos x\sim x\ln 4\\ \operatorname{arctg}4x\sim 4x\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln 4}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln 4}{4}=\frac{\ln 4}{4}=\frac{2\ln 2}{4}=\frac{\ln 2}{2}$$

2 Найти полный дифференциал функции: $z=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$

Найдём $z'_x=\left(\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}\right)'_x=\frac{1}{1+\frac{(x+y)^2}{(1-xy)^2}}\cdot\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)'_x=$

$$=\frac{1}{\frac{(1-xy)^2+(x+y)^2}{(1-xy)^2}}\cdot\frac{1-xy+y(x+y)}{(1-xy)^2}=$$

$$=\frac{(1-xy)^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2}\cdot\frac{1+y^2}{(1-xy)^2}=\frac{1+y^2}{(1-2xy+x^2y^2+x^2+2yx+y^2)}=$$

$$=\frac{1+y^2}{1+x^2y^2+x^2+y^2}$$

Найдём $z'_y=\left(\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}\right)'_y=\frac{(1-xy)^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2}\cdot\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)'_y=$

$$=\frac{(1-xy)^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2}\cdot\frac{1-xy+x^2+xy}{(1-xy)^2}=$$

$$=\frac{1+x^2}{1+x^2y^2+x^2+y^2}$$

Запишем полный дифференциал $dz=z'_x dx+z'_y dy$:

$$dz=\frac{1+y^2}{1+x^2y^2+x^2+y^2}dx+\frac{1+x^2}{1+x^2y^2+x^2+y^2}dy$$

③ Найти интеграл $\int \frac{2-x}{x^2+1}dx$

Решение:

$$\int \frac{2-x}{x^2+1}dx = -\int \frac{x-2}{x^2+1}dx = -\int \frac{x\,dx}{x^2+1} + 2\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + 2\cdot\frac{1}{1}arctg\frac{x}{1} + c =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + 2arctg\,x + c$$

④ Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 x\cdot 3^x dx$

Решение:

$$\int\limits_0^1 x\cdot 3^x dx = \left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = 3^x dx & v = \frac{3^x}{\ln 3} \end{matrix} \right| = \frac{3^x\cdot x}{\ln 3}\Big|_0^1 - \frac{1}{\ln 3}\int\limits_0^1 3^x dx =$$

$$= \frac{3}{\ln 3} - \frac{1}{\ln^2 3}\cdot 3^x\Big|_0^1 = \frac{3}{\ln 3} - \frac{3}{\ln^2 3} + \frac{1}{\ln^2 3} =$$

$$= \frac{3}{\ln 3} - \frac{2}{\ln^2 3}$$

⑤ Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

Решение:

$$\int\limits_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \int\limits_{e^2}^{\infty} \frac{d(\ln x)}{\sqrt{\ln x}} = 2\sqrt{\ln x}\Big|_{e^2}^{\infty} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(2\sqrt{\ln x} - 2\sqrt{\ln e^2}\right) = \infty - 2\sqrt{2} = \infty$$

Так как интеграл стремится к бесконечности, то он расходится.